数理解析研究所講究録
1042巻 1998年 193-220

$\mathbb{C}^2$ の複素力学系に関する Bedford–Smillie の最近の結果について

by

石井　豊 (Yutaka ISHII)*

Department of Mathematical Sciences

University of Tokyo

Abstract

I report some recent results on the dynamics of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ established by E. Bedford and J. Smillie. Relationships between the minimality of the Lyapunov exponent, the connectivity of the Julia set, behavior of "dynamical crtical points" et cetera are investigated. Key tools in their analysis (pluripotential theory, Pesin theory and laminated spaces) are also explained.

1 初めに

１９９０年代初頭から、E. Bedford と J. Smillie (一部 M. Lyubich と共同) は

Polynomial Diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: I–VII

とタイトルされた一連の論文の中で、複素二次元空間における多項式自己同型写像の力学系について、幾つかの重要な結果を得ました。このうち、前半の部分（パート１からパート４まで）は既に論文として出版されているので、本稿では現時点（１９９７年秋）でまだプレプリントの状態にある後半（パート５からパート７）の内容について解説を試みます。ちなみに、これらのプレプリントはインターネットを通して入手が可能です。詳しくはニューヨーク州立大学ストーニー・ブルック校にある力学系のホームページ

`http://www.math.sunysb.edu/dynamics/preprints/preprints.html`

にアクセスして下さい。

*Current address: Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Hakozaki, Fukuoka 812, Japan. E-mail: yutaka@math.kyushu-u.ac.jp

以下では、まず第二章において、Friedland-Milnor の分類定理について述べた後、複素二次元におけるジュリア集合やグリーン関数を定義します。第三章では、Bedford-Smillie 理論を理解する上でキーとなる三つの予備知識のうちの一つめ、「多重ポテンシャル理論 (pluripotential theory)」について説明します。続く第四章ではこの多重ポテンシャル理論を先のグリーン関数に応用してある不変測度を定義し、そのエルゴード論的性質について調べます。第五章では二つめの道具である「Pesin 理論」を簡単に復習し、第六章ではそれを用いて、前々章で定義された不変測度の安定·不安定多様体に付随した幾何学的性質を考察します。また第七章では力学系的な "critical points" を考えている力学系（しかしこれは微分同相写像である！）に対して定義し、その分布を表す "critical measure" と力学系のリヤプノフ指数との間に成り立つある積分公式（パート５の主定理）を紹介します。第八章で三つめの道具である「laminated space」の概念（特に Riemann surface lamination）を導入し、最後の第九章で（パート６、７の）主定理を述べ、その証明の流れの一部について説明します。

尚、今回第九章で述べる証明の方法は、現在入手可能なパート５からパート７ [BS5, BS6, BS7] だけではなく、その予稿であったプレプリント [BS0] にも一部依っています。

2 ジュリア集合とグリーン関数

以下、力学系としては

$$f = f_{p_1,b_1} \circ f_{p_2,b_2} \circ \cdots \circ f_{p_k,b_k}.$$

の形の写像のみを考えることにします。ここで、各 f_{p_i,b_i} は一般エノン写像 (*generalized Hénon mapping*):

$$f_{p,b} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} p(x) - by \\ x \end{pmatrix}$$

なる特別な形をした族 [He] のことで、$p(x)$ は複素係数一変数の（モニックな）次数２以上の多項式、b はゼロでない複素パラメータとします。写像 f が $\mathbb{C}^2$ からそれ自身への多項式写像で、かつ逆写像も存在してそれもまた多項式になる（このような写像のことを多項式自己同型と呼ぶ）ことは容易にチェックできます。また、f のヤコビアン行列式は定数 $b \equiv b_1 \cdots b_k$ になります。以後では、多項式 p_1 から p_k までの次数の積を $d(\geq 2)$ で表して、f の次数と呼ぶことにします。

さて、なぜ上のような特別な形をした写像 f のみを考えるのかという理由は、次の Friedland-Milnor の結果によっています。いま、$\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型全体のなす群を G としたとき、

Theorem 2.1 (Friedland-Milnor [FM]) G の元 g で "力学系的に非自明なもの" は、上のような形のある f とアファイン写像で共役になる。

ここで“力学系的に自明な” g とは、その非遊走集合が一点または有限個の複素直線であり、各複素直線上で g の何回かの反復はその自己同型になるような写像のことです。ですから、力学系の観点からは、上のような形をした f のみを考察すれば十分であることが結論されます。

Remark 2.2 G の元のヤコビアン行列式は必ずゼロでない定数になることは容易にわかるが、逆に「$\mathbb{C}^2$ の多項式写像でそのヤコビアン行列式がゼロでない定数ならそれは実は多項式自己同型か？」という問題をヤコビアン予想と言う。また、先の Friedland と Milnor の結果は、Jung の定理「G はアファイン写像と初等写像（$y = \text{const.}$ を $y = \text{const}'.$ に写す）で生成される」に基づいている。

では、上のような力学系 f に対し、Hubbard と Oberste-Vorth [HO] に従って以下のような不変集合を考えましょう。

$$U^{\pm} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \left\| f^{\pm n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \longrightarrow +\infty \ (n \to +\infty) \right\},$$

$$K^{\pm} \equiv \mathbb{C}^2 \setminus U^{\pm}, \qquad J^{\pm} \equiv \partial K^{\pm}.$$

ここで、$J^{\pm}$ は $\{f^{\pm n}\}_{n \geq 0}$ が正規族にならないような初期点全体としても特徴付けられます。更に f のジュリア集合 (*Julia set*) を

$$J \equiv J^{+} \cap J^{-},$$

で定義します（図1）。

これらの集合を解析するために、次の様なグリーン関数 (*Green functions*):

$$G^{\pm} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{d^n} \log^{+} \left\| f^{\pm n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

を考えましょう。更に次の写像:

$$\varphi^{+} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \lim_{n \to \infty} \left(\pi_1 \circ f^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^{1/d^n},$$

が以下では重要な役割を果たします。ここで、π_1 は第一座標への射影を表し、また d^n 乗根の分枝としては、$\|(x,y)\|$ が無限遠に向かうとき、φ^{+} が π_1 にタンジェントするようなものを取ります。実際、十分大きな $R > 0$ に対し、この写像は

$$V^{+} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |x| \geq |y|,\ |x| \geq R \right\}$$

で定義され、そこで解析的になります。定義から直ちに

$$G^+ \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d \cdot G^+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

が $\mathbb{C}^2$ 全体で成立し、$G^+(x,y) > 0$ の必要十分条件が $(x,y) \in U^+$ であることも示せます (G^- についても同様)。また V^+ 上で

$$\varphi^+ \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\varphi^+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^d \tag{2}$$

かつ $\log|\varphi^+(x,y)| = G^+(x,y)$ も容易にわかります。ところで、簡単な計算から、

$$U^{\pm} = \bigcup_{n \leq 0} f^{\pm} V^{\pm}$$

がわかりますが、実は上の等式 (2) を満たすように φ^+ を $\mathbb{C}^2$ 全体には決して連続拡張できないことが知られています [HO]。そこで、この φ^+ がいつ $J^- \cap U^+$ に沿って解析接続出来るか、を考察することが以後での鍵となります。

更に詳しいグリーン関数の性質として、以下がわかります。

Lemma 2.3 $G^{\pm}$ は $\mathbb{C}^2$ で連続かつ多重劣調和、$U^{\pm}$ で多重調和。

次章ではここに出てきた「多重劣調和 (plurisubharmonic)」、「多重調和 (pluriharmonic)」なる用語等を解説しましょう。

3 多重ポテンシャル理論とカレント

本章では、空間の次元を二次元に制限せず、一般的に $\mathbb{C}^n$ の開集合 U の上で考えます。詳細は Klimek のテキスト [Kl] を参照して下さい。

Definition 3.1 上半連続関数:

$$u : U \longrightarrow [-\infty, +\infty)$$

(但し、U の如何なる連結成分上でも $u \not\equiv -\infty$ とする) が全ての複素直線上で (一次元の意味で) 劣調和あるいは恒等的に $-\infty$ のとき、u は多重劣調和 (*plurisubharmonic*) であると言う。

多重劣調和関数はいわゆる「最大値の原理」を満たします。また、多重劣調和関数 u と正則関数 h との合成 $h \circ u$ はまた多重劣調和になります。特に、ある holomorphic dynamics の安定 (不安定) 多様体に多重劣調和関数を制限すると、(安定多様体上の座標に関して) また多重劣調和になることがわかります。続いて、

Definition 3.2 $u, -u$ がともに多重劣調和であるとき、u は多重調和（*pluriharmonic*）であるという。

C^2 級関数 u に対して、

$$dd^c u \equiv 2i \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

と定義します。この時、C^2 級関数 u が $dd^c u = 0$ であることと多重調和であることは同値になります（実は、後に述べるカレントの意味で考えれば、C^2 級であるという仮定は落としても構いませ）。

続いてカレントについて説明しましょう。いま、二種類のフォームの空間を考えます：

$$\mathcal{D}_{p,q}(U) \equiv \left\{ \sum_{|I|=p, |J|=q} \phi_{I,J} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q} \,\middle|\, \phi_{I,J} \in C_0^\infty(U) \right\},$$

$$\mathcal{C}_{p,q}(U) \equiv \left\{ \sum_{|I|=p, |J|=q} \phi_{I,J} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q} \,\middle|\, \phi_{I,J} \in C_0^0(U) \right\}.$$

ここで $I = (i_1, \cdots, i_p)$ や $J = (j_1, \cdots, j_q)$ はマルチ・インデックスです。それぞれの空間での位相は通常の超関数論と同様のものを考えて下さい。$\mathcal{D}_{p,q}(U)$ をテスト・フォーム (*test form*) の空間と呼びます。

Definition 3.3 $\mathcal{D}_{n-p,n-q}(U)$ 上の連続線形汎関数のことを (p, q)-カレントと呼ぶ。

カレントの重要な例を一つ考えましょう。いま、M を $\mathbb{C}^n$ の複素 k 次元部分多様体であって、局所有限な実 $2k$ 次元体積を持つものとします。この時、$\varphi \in \mathcal{D}_{k,k}(\mathbb{C}^n)$ に対して

$$[M](\varphi) \equiv \int_M \varphi|_M$$

とおくと $[M]$ は $(n-k, n-k)$-カレントとなります。ここで $\varphi|_M$ とは、M の $\mathbb{C}^n$ への包含写像から微分形式の空間に誘導される自然な写像による φ の引き戻しです。このようなカレント $[M]$ のことを、M の積分カレント（*current of integration*）と呼びます。

以後では次の事実が重要となります。

Proposition 3.4 ([Kl], Proposition 3.3.5) u が多重劣調和の時、$dd^c u$ は $\mathcal{C}_{n-1,n-1}(U)$ 上の連続線形汎関数に拡張される。

これは、一変数関数論において、劣調和関数にラプラシアンを施したものは正値超関数、すなわち測度になる、という事実の拡張です。

さて、一般に超関数同士の（あるいはカレント同士の）積は定義できませんが、上の Proposition にあるようなカレントに対しては、次のように積がうまく定義できます。

Definition 3.5 連続な多重劣調和関数 u_1, u_2 に対して、その積 $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2$ を

$$\langle dd^c u_1 \wedge dd^c u_2, \chi \rangle \equiv \langle dd^c u_1, u_2 dd^c \chi \rangle, \quad \chi \in \mathcal{D}_{n-2,n-2}(U)$$

で定める。

ここで、前の Proposition より、$dd^c u_1$ は $u_2 dd^c \chi$ に対して値を持つことに注意してください。また、上式の両辺は各 u_i が可微分な時には微分形式として等しいことがチェックできます。更に、 u_i を上から滑らかな多重劣調和関数で近似することにより、(2,2)-カレント $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2$ も $\mathcal{C}_{n-2,n-2}(U)$ 上の連続線形汎関数に拡張されることが示されます([Kl], page 113)。特に、$n = 2$ の時、 $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2$ は正値測度になることが結論されます。

4 最大エントロピー測度の構成とその性質

この章では、前章で解説した多重ポテンシャル理論を今考えている力学系に適用してみましょう。まず、グリーン関数 $G^\pm$ は $\mathbb{C}^2$ で局所可積分だから、(1,1)-カレント $\mu^\pm \equiv \frac{1}{2\pi} dd^c G^\pm$ を

$$\langle \frac{1}{2\pi} dd^c G^\pm, \chi \rangle \equiv \langle \frac{1}{2\pi} G^\pm, dd^c \chi \rangle, \quad \chi \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{C}^2)$$

で定義できます。この時、以下がわかります。

Proposition 4.1 $\operatorname{supp} \mu^\pm = J^\pm$

Proof. Lemma 2.3 より G^+ は U^+ で多重調和なので、カレントの意味で $\mu^+ \equiv 0$ となる。よって $\operatorname{supp} \mu^+ \subset J^+$ が言える。逆に、ある点 $x \in J^+$ とその近傍 W が存在して、$\operatorname{supp} \mu^+ \cap W$ が空だったとする。このとき W 上 $dd^c G^+ \equiv 0$ となる。$W \cap K^+$ 上 $G^+ \equiv 0$ かつ $\mathbb{C}^2$ 上 $G^+ \geq 0$ だから最小値原理より W 全体で $G^+ \equiv 0$。これは $W \cap U^+$ 上 $G^+ > 0$ であることに反する。(証明おわり)

カレントの引き戻し $f^* dd^c G^\pm \equiv dd^c (G^\pm \circ f)$ に関して、

$$f^* \mu^+ = d\mu^+, \quad f^* \mu^- = \frac{1}{d} \mu^- \tag{3}$$

が成立することは、等式 (1) から直ちにわかります。

また各 $G^\pm$ は多重劣調和だったことから、Definition 3.5 より、$\mu \equiv \mu^+ \wedge \mu^-$ を

$$\langle \mu^+ \wedge \mu^-, \chi \rangle = \langle \frac{1}{2\pi} dd^c G_+, \frac{1}{2\pi} G^- dd^c \chi \rangle, \quad \chi \in \mathcal{D}_{0,0}(\mathbb{C}^2)$$

で定めることが出来、この μ は測度になります。更に、

Proposition 4.2 μ は f-不変な確率測度になり、$\mathrm{supp}\,\mu \subset J$ を満たす。

μ が確率測度になることは、μ が $K \equiv K^+ \cap K^-$ の複素平衡測度（*complex equilibrium measure*）になることから導かれます（[Ni], Theorem 4.21)。その他の主張は等式 (3) から明らかでしょう。

Remark 4.3 f が J 上で双曲的（*hyperbolic*）なとき、単に f が双曲的（*hyperbolic*）であると言う。Bedford – Smillie により、f が双曲的なときには $\mathrm{supp}\,\mu = J$ であることが示されている [BS1]（但し、一般の場合は未解決)。

さて、第三章で説明した積分カレント $[M]$ を用いて、Bedford と Smillie は以下の重要な事実を示しました。

Theorem 4.4 (Bedford-Smillie [BS2]) M を J^- 内の局所閉一次元部分多様体とする。この時、ある $c > 0$ が存在して、

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{d^n}[f^n M] = c\mu^-$$

が成立する。

この事実がパート 1 からパート 3 までにおける彼らの研究の最大の武器となっており、例えば、任意のサドル周期点に対してその不安定多様体が J_- で稠密になること、f の安定周期軌道（が二つ以上ある時）の吸引領域として現れる Fatou-Bieberbach 領域の境界は決して位相多様体にならないこと等 [BS2] が示されます。上記の Theorem 4.4 の証明及び周辺の結果については、西村先生による日本語で書かれた大変詳しい解説 [Ni] がありますので、そちらを参照して下さい。

本章の最後に、この不変測度 μ の力学系的性質をもう少し詳しく見てみましょう。まず、変分原理的特徴付けとして、

Theorem 4.5 (Friedland-Milnor [FM], Bedford-Smillie [BS3], Smillie [Sm], Bedford-Lyubich-Smillie [BLS]) μ は

$$h_\mu(f) = h(f) = \log d$$

を満たす。更に上式を満たすような f-不変確率測度は μ のみ。

すなわち μ は一意的な最大エントロピー測度（*maximal entropy measure*）として特徴付けられます。さて、一般の f はもちろん双曲的ではありませんが、常に次の意味での“弱い双曲性”を持ちます。

Theorem 4.6 (Bedford-Smillie [BS3]) μ は混合的（*mixing*）かつ（サドル・タイプの）双曲的測度（*hyperbolic measure*)。

前半の事実から、特に μ はエルゴード的（*ergodic*）となります。ここで言う「測度の双曲性」の概念は以後話を進める上で大変重要で、次章で詳しく説明します。ちなみに、μ が双曲的測度になるという事実は、([BS3] では具体的にリアプノフ指数の評価をしていますが）実は $h_\mu(f) > 0$ であることと Margulis-Ruelle の不等式（例えば [Po]）から直ちに導かれます。

5 Pesin 理論

本章では、Bedford-Smillie の仕事を理解する上で必要なふたつめの道具である Pesin 理論を、(議論を見通し良くする為に) $\mathbb{C}^2$ 上の力学系 f に絞って簡単に復習します。Pollicott の本 [Po] は（間違いが多いですが）この方面の内容についてコンパクトにまとめられたテキストです。

まず、以下の事実は多重エルゴード定理としてよく知られています。

Theorem 5.1 (Oseledec) もし ν が f-不変なエルゴード的確率測度なら、ν に関しほとんど全ての p で Df_p-不変な直和分解：

$$T_p\mathbb{C}^2 = E_p^1 \oplus E_p^2, \quad Df_p(E_p^i) = E_{f(p)}^i$$

と $\lambda_1 \geq \lambda_2$ が存在し、全てのゼロでないベクトル $v \in E_p^i$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|(Df^n)_p v\| = \lambda_i$$

が成立する。

上の定理にある $\lambda_1 \geq \lambda_2$ を f の特性指数（*characteristic exponents*）と呼び、特にその最大のものを $\Lambda_\nu(f) \equiv \lambda_1$ と書いて、f のリヤプノフ指数（*Lyapunov exponent*）といいます。さて、前章で出た「測度の双曲性」の定義は、以下のようなものです。

Definition 5.2 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ を満たすとき、ν は（サドル・タイプの）双曲的測度（*hyperbolic measure*）であると言う。

このような双曲的測度を持つ力学系に対して安定·不安定多様体定理を与えたのが Pesin です。この定理を述べる為に次のような集合列を考えましょう。

Definition 5.3 サドル・タイプの双曲的測度 ν に対して、$\lambda_1 \gg \epsilon > 0$、$-\lambda_2 \gg \epsilon > 0$ を満たす $\epsilon > 0$ を固定する。このとき各 $k \in \mathbb{N}$ について、

$$\Lambda_k \equiv \left\{ x \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{There exists a splitting } T_x\mathbb{C}^2 = E_x^u \oplus E_x^s \text{ of the tangent space} \\ \text{so that, for all } n \geq 1,\ m \in \mathbb{Z}, \text{ we have} \\ \text{(i) } \|Df^n|_{Df^m(E_x^s)}\| \leq e^{\epsilon k} e^{(\lambda_2+\epsilon)n} e^{|m|}, \\ \text{(ii) } \|Df^{-n}|_{Df^m(E_x^u)}\| \leq e^{\epsilon k} e^{-(\lambda_1-\epsilon)n} e^{|m|}, \\ \text{(iii) } \tan \angle(Df^m(E_x^s), Df^m(E_x^u)) \geq e^{-\epsilon k} e^{-\epsilon|m|}. \end{array} \right\}$$

と定める。

このとき、各 Λ_k は閉集合であって、$\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$ であり、E_x^i の方向は各 Λ_k 上連続になることが知られています。但し、一般には各 Λ_k は f-不変にならないことに注意して下さい。

Definition 5.4 集合

$$\mathcal{R} \equiv \bigcup_k \Lambda_k$$

を f の *Pesin* 集合（*Pesin set* あるいは *regular set*）と呼ぶ。

Theorem 5.5 (Oseledec) $\nu(\mathcal{R}) = 1$.

以上の設定のもと、Pesin の定理は以下のように表現されます。

Theorem 5.6 (Pesin) ある $\epsilon_0 > 0$ が存在し、各 $x \in \Lambda_k$ に対して $r \equiv \epsilon_0 e^{-\epsilon k}$ とおくと、

(i) 点 x での局所不安定多様体：

$$W_{loc}^u(x) \equiv \left\{ y \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; d(f^n(x), f^n(y)) < r,\; d(f^n(x), f^n(y)) < e^{(\lambda_1 - \epsilon)n} \quad (n \leq 0) \right\}$$

が存在し

(ii) しかも $W_{loc}^u(x)$ はある正則関数：

$$h : D^u(r) \equiv \left\{ y \in E_x^u \;\middle|\; \|y\| < r \right\} \longrightarrow E_x^s$$

のグラフとして表わされ、

(iii) $T_x W_{loc}^u(x) = E_x^u$ を満たす。

局所安定多様体についても上の *(i)* から *(iii)* と同様の事実が成立する（図２）。

すなわち、$\mathcal{R}$ の各点 x で局所安定·不安定多様体が存在し、しかもその局所多様体の挙動は x の属する Λ_k の番号 k でコントロールされることを、上の定理は示しています。

6　最大エントロピー測度の幾何学的構造

さて、いよいよ多重ポテンシャル理論と Pesin 理論を組み合わせて、最大エントロピー測度 μ の構造をより詳細に解析します。そのために、まず局所不安定多様体の族を

"foliation" として捉えることから出発します。いま、$x_0 \in \Lambda_k$ を固定し、F を x_0 の Λ_k での δ-近傍（但し、$0 < \delta \ll \epsilon_0 e^{-\epsilon k}$）とします。局所不安定多様体の族による "foliation"：

$$\mathcal{F}_F^u \equiv \left\{ W_{loc}^u(x) \,\middle|\, x \in F \right\}$$

とその和集合：

$$W_{loc}^u(F) \equiv \bigcup_{y \in F} W_{loc}^u(y)$$

を考え、$\mathcal{F}_F^u$ の tranversals D_i $(i = 1, 2)$ であって、$W_{loc}^s(x_0)$ に C^1-位相で十分近いものを二つとります。但しここで二つの部分多様体が C^1-位相で十分近いとは、(Theorem 5.5 に於ける h のように) それぞれの多様体をそのグラフとして表現するような関数同士が C^1-位相で十分近いことを意味します (図3)。この時、foliation に沿った holonomy map：

$$\chi = \chi(D_1, D_2, \mathcal{F}_F^u) \ : \ D_1 \cap W_{loc}^u(F) \longrightarrow D_2 \cap W_{loc}^u(F)$$

が矛盾なく定義され、この χ は（Λ_k 上の E_x^u の傾きの連続性から）$D_1 \cap W_{loc}^u(F)$ と $D_2 \cap W_{loc}^u(F)$ の間の同相写像を与えます。よって、$\mathcal{B}^{u/s} \equiv W_{loc}^{u/s}(F)$、$P^{u/s} \equiv \mathcal{B}^{u/s} \cap W_{loc}^{s/u}(x_0)$ とした時、$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}^u \cap \mathcal{B}^s$ は直積集合 $P^u \times P^s$ と同相になります。

Definition 6.1 上の $\mathcal{B}$ を *Pesin box*、$\mathcal{B}^s$（*resp.* $\mathcal{B}^u$）を安定（*resp.* 不安定）*Pesin box* という。

各 Λ_kはコンパクトなので、Pesin 集合 $\mathcal{R}$ は可算個の Pesin box で覆われることに注意して下さい。

さて、ある D と D 上のテスト関数 ϕ に対し、

$$\mu^-|_D(\phi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int G^-|_D dd^c|_D \phi$$

と置くと、$\mu^-|_D$ は D 上の測度（slice measure と言う）になります。この時、以下のように $\mu^-|_D$ は holonomy map χ に関して不変になります。

Theorem 6.2 (Bedford-Lyubich-Smillie [BLS])

$$(\chi)_* \Big(\mu^-|_{D_1} \llcorner (D_1 \cap W_{loc}^u(F)) \Big) = \mu^-|_{D_2} \llcorner (D_2 \cap W_{loc}^u(F)).$$

ここで $\mu^-|_D \llcorner A$ は測度 $\mu^-|_D$ の集合 A への制限を表す。

この事実から、μ をある Pesin box $\mathcal{B}$ に制限したものは、$\mathcal{B}$ の直積構造に付随した、直積測度の構造を持つことがわかります。より詳しく言うと、$\mathcal{B}$ を一つの Pesin box としたとき、$\mathcal{P}^{u/s}$ 上の測度：

$$\lambda^{u/s} \equiv \mu^{+/-}|_{W_{loc}^{s/u}(x_0)} \llcorner \mathcal{P}^{u/s}$$

を考えると、$P^u \times P^s$ 上の直積測度 $\lambda^u \otimes \lambda^s$ を $\mathcal{B}$ への同相写像で送ったものが$\mu \llcorner \mathcal{B}$ になることが示されます。

7 力学系的 critical points と critical measure

この章では、まず複素一変数多項式 p の critical points のポテンシャル論的位置と p のリヤプノフ指数との関係を与える Manning-Przytycki の定理を紹介することから始めます。J_p を 一変数多項式 p のジュリア集合（定義は、例えば [Mi] を参照して下さい)、ν を J_p の調和測度（Brolin measure とも呼ばれる）としましょう。ν に付随した p のリヤプノフ指数は

$$\lambda_\nu(p) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \log |Dp^n(x)| d\nu(x)$$

で定義されます。このとき、

Theorem 7.1 (Manning [Ma], Przytycki [Pr]) 一変数多項式 p（次数は $d \geq 2$ とする）に対して

$$\lambda_\nu(p) = \log d + \sum_i G(c_i)$$

となる。ここで、$\{c_i\}$ は p の *critical points* で、G は J_p のグリーン関数。

本章の目標は、上述の定理の類似である積分公式（上式の和が積分に変わる）を $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同型に対して示すことです。ところが、いま我々の考えている力学系 f は微分同相写像なので、普通の意味での critical point を持ちません。そこで Bedford と Smillie [BS5] は以下のようにして f の力学系的 "critical points" を K^+ や K^- の外側で定義しました。まず、

$$\tilde{\mathcal{R}} \equiv \left\{ x \in \mathcal{R} \;\middle|\; \text{There exist } k \text{ and infinitely many } n_j < 0 \text{ so that } f^{n_j}x \in \Lambda_k \right\}$$

とおきます。

Definition 7.2 上述の定義のもと、

$$\mathcal{C}^u \equiv \bigcup_{p\in\tilde{\mathcal{R}}} \mathrm{Crit}(G^+|_{W^u(p)\setminus K^+})$$

とおいて、この集合の元を f の（*unstable*）*dynamical critical point* と呼ぶ。ここで、$\mathrm{Crit}(g)$ は g の（通常の意味での）critical points の集合を表す。

次に、この dynamical critical points の分布をあらわす測度 critical measure μ_c^- を定義するために、$\tilde{\mathcal{R}}$ の性質について少し考察してみます。

Proposition 7.3 以下の事実が成立する。

(i) $\mu(\tilde{\mathcal{R}}) = 1$,

(ii) $x \in \tilde{\mathcal{R}}$ なら x における不安定多様体 $W^u(x)$ は $\mathbb{C}$ と等角同値で、しかも

$$W^u(x) \subset \bigcup_{n\geq 0} f^n\Big(\bigcup_j \mathcal{B}_j^u\Big),$$

(iii) 全てのサドル周期点は $\tilde{\mathcal{R}}$ に含まれる。

Proof. k が十分大きければ $\mu(\Lambda_k) > 0$ となる。よって、Poincaré の再帰性定理より (i) が従う。いま適当に番号をつけかえて、$|n_{j+1} - n_j| \to +\infty$ としてよい。χ_j を $W^u_{loc}(f^{n_j}(x))$ から $E^u_{f^{n_j}(x)}$ への射影とし、正則単射写像：

$$\psi_j \equiv \chi_{j+1} \circ f^{n_{j+1}-n_j} \circ \chi_j^{-1} : D_j \longrightarrow D_{j+1}$$

を考える（図４）。まず不安定多様体の定義から$\bigcup_{j>0} f^{-n_j} \circ \chi_{j+1}^{-1}(D_{j+1})$ は $W^u(x)$ に含まれる。一方、集合 Λ_k の定義から、$|\psi_j'(0)| = \|Df^{n_{j+1}-n_j}|_{E^s_{f^{n_j}(x)}}\|$ は十分小さい。これより

$$\operatorname{mod}\,(f^{-n_j} \circ \chi_{j+1}^{-1}(D_{j+1}) \setminus f^{-n_{j-1}} \circ \chi_j^{-1}(D_j)) > 2$$

が従い（Koebe の定理）、$\bigcup_{j>0} f^{-n_j} \circ \chi_{j+1}^{-1}(D_{j+1})$ は $\mathbb{C}$ と等角同値になる。よって

$$\bigcup_{n\geq 0} f^n\Big(\bigcup_j \mathcal{B}_j^u\Big) \supset \bigcup_{j>0} f^{-n_j} \circ \chi_{j+1}^{-1}(D_{j+1}) = W^u(x)$$

となり、(ii) が証明できた。(iii) は Pesin 集合の定義からあきらか。（証明おわり）

ではまず、一つの不安定 Pesin box $\mathcal{B}^u$ 上で μ_c^- を定義します。

Definition 7.4 *T を Pesin box $\mathcal{B}^u$ の transversal とする。$X \subset \mathcal{B}^u$ に対して、f の critical measure を*

$$\mu_c^- \llcorner \mathcal{B}^u(X) \equiv \int_{t\in T} \sharp \mathrm{Crit}(G^+|_{(\Gamma_t\setminus K^+)\cap X}) d\mu^-|_T(t)$$

で定める。ここで、 Γ_t は $\mathcal{B}^u$ を構成する局所不安定多様体のなかで t を含む連結成分、$\sharp A$ は A の重複度込みの濃度をあらわす（図５）。

但し G_+ の重複度とは、$(G^+)^*$ を G^+ の局所的な共役調和関数とした時、正則関数 $G^+ + i(G^+)^*$ の重複度として定義します。まず、前に述べた holonomy 不変性から、上の定義は tansversal T の取り方には依りません。また、二つの不安定 Pesin box が共通部分を持つ時、そこで critical measure の定義は一致します。よって、$\bigcup \mathcal{B}_j^u$ で μ_c^- が定義されたことになります。では任意の Borel 集合 $A \subset \mathbb{C}^2$ に対して $\mu_c^-(A)$ を定めましょう。

$$A_n \equiv \Big(f^n\Big(\bigcup \mathcal{B}_j^u\Big) \setminus f^{n-1}\Big(\bigcup \mathcal{B}_j^u\Big)\Big) \cap A$$

とおくと、先の Proposition 7.3 (ii) より $f^{-n}(A_n) \subset \bigcup \mathcal{B}_j^u$ なので

$$\mu_c^-(A_n) \equiv \frac{1}{d^n}\mu_c^-(f^{-n}(A_n))$$

が定義されます。$\bigsqcup A_n = A$ より、$\mu_c^-(A) \equiv \sum \mu_c^-(A_n)$ とおきます。この式が矛盾無く定義されていることは簡単にチェックでき、また $G^+\mu_c^-$ が f-不変であることもわかります。

さて、上述の Manning-Przytycki の公式のアナロジーとして、Bedford-Smillie は以下を得ました。

Theorem 7.5 (Bedford-Smillie [BS5]) 任意の $t > 0$ に対し、

$$\Lambda_\mu(f) = \log d + \int_{t \le G^+ < td} G^+ \, d\mu_c^-.$$

$\Lambda_\mu(f^{-1})$ についても同様の等式が成り立つ。

よって特に、f のリヤプノフ指数は下から $\log d$ で評価されます。

Definition 7.6 f のリヤプノフ指数が$\Lambda_\mu(f) = \log d$ をみたす時、f はソレノイダル (*solenoidal*) であるという。

第九章では、f がソレノイダルであることと他の概念（ジュリア集合の連結性、dynamical critical point の非存在、φ^+ の拡張可能性など）との関係を考察します。

8 Laminated spaces と Riemann surface laminations

通常の「多様体」とは局所的にユークリッド空間でモデル化される位相空間のことですが、力学系の不変集合として出てくる位相空間は大抵の場合多様体にはなりません。例えばよく知られたエノン・アトラクター [He] は、局所的にはあたかも滑らかな曲線とカントール集合との直積のように見えます。そこでこの章では、滑らかな多様体を重ね合わせた空間によって局所的にモデルされるようなオブジェクト「laminated space」を考えることにしましょう。

まず例から始めます。

Example 1.

$$\begin{aligned}\Sigma_+ &\equiv \varprojlim(\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta},\ z \longmapsto p_0(z) = z^d) \\ &\equiv \left\{(\cdots, z_{-2}, z_{-1}, z_0) \,\middle|\, z_n \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta},\ p_0(z_{i-1}) = z_i \ (i \le 0)\right\}.\end{aligned}$$

とおきます。固定された z_0 に対してその逆像 z_{-1} は d 通りあり、各 z_{-1} に対してそれぞれの逆像 z_{-2} も d 通りあります。よって固定された z_0 に対してその逆軌道全体はカント

ール集合をなすことがわかり、Σ_+ そのものは局所的に複素平面内の開集合とカントール集合の直積でモデルされることがわかります。これを複素ソレノイド（*complex solenoid*）といいます。この空間の上には $p_0(z) = z^d$ の自然な持ち上げ：

$$\hat{p_0}(\cdots, z_{-2}, z_{-1}, z_0) \equiv (\cdots, z_{-3}, z_{-2}, z_{-1}).$$

が定義されます。(Example 1 おわり)

Example 2.

$$\begin{aligned}\Sigma &\equiv \varprojlim(|z| = 1,\ z \longmapsto p_0(z) = z^d) \\ &\equiv \Big\{(\cdots, z_{-2}, z_{-1}, z_0) \Bigm| z_n \in |z| = 1,\ p_0(z_{i-1}) = z_i\ (i \leq 0)\Big\}.\end{aligned}$$

は局所的には滑らかな弧とカントール集合の直積でモデルされ、この空間の上にも $p_0(z) = z^d$ の自然な持ち上げ $\hat{p_0}$ が定義されます。これを（ユニット）ソレノイド（(*unit*) *solenoid*）と呼びます。Σ は Σ_+ の "境界" に対応していることに注意して下さい。(Example 2 おわり)

では上のようなオブジェクトに対する厳密な数学的定式化を与えましょう。

Definition 8.1 位相空間 Z が（C^r-級の）*laminated space* の構造 $\mathcal{L}$ をもつとは、

(i) $\mathcal{L} = \{L_\lambda\}_\lambda$ は Z の開被覆であり、

(ii) 各 $L \in \mathcal{L}$ に対して、ある開集合 $X_L \subset \mathbb{R}^m$ とある完全不連結な位相空間 Y_L と同相写像：

$$\rho_L : L \longrightarrow X_L \times Y_L$$

が存在し、

(iii) $L,\ L' \in \mathcal{L}$ が共通部分を持つ時、

$$\rho_L \circ \rho_{L'}^{-1} : \rho_{L'}(L \cap L') \longrightarrow \rho_L(L \cap L')$$

は $\rho_L \circ \rho_{L'}^{-1}(x, y) = (g(x, y), h(y))$ という形に書け、g, h は連続で、各 y に対して $x \mapsto g(x, y)$ は C^r-級（図６）。

ここで$\rho_L^{-1}(X_L \times \{y\})$ のかたちの集合のことを *plaque* という。写像 $\rho_L \circ \rho_{L'}^{-1}$ によって plaque は plaque に写されるので、互いに写り合う plaque 同士の和集合は多様体の構造を持つ。これを *leaf* という。上の定義において特に X_L が $\mathbb{C}$ の開集合で $x \longmapsto g(x, y)$ が正則写像のとき、$\mathcal{L}$ を *Riemann surface lamination* とよぶ。Riemann surface lamination の各 leaf はリーマン面になる。

あきらかに上述の複素ソレノイドは Riemann surface lamination の構造を持ちます。Riemann surface lamination の詳しい議論については、論文 [Ca] を参照して下さい。

以後では、V^+ で定義された φ^+ を $J^- \setminus K^+$ に沿って解析接続できるかどうかを考えます。我々はこの拡張可能性問題をφ^+ のリフトの問題として捉え直すのですが、一般に $J^- \setminus K^+$ は局所弧状連結ではないので、基本群を用いた一般的な議論（例えば E. Spainer, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966) の page 76）に訴えることができません。そこで次のような補題を準備します。

Lemma 8.2 $\pi : \tilde{Y} \to Y$ を *covering*、$\psi : X \to Y$ を連続写像とし、$A \subset X$ は X の強レトラクト変形とする。いま $\psi|_A$ のリフト$\psi_1 : A \to \tilde{Y}$ があったとすると、ψ のリフト ψ' が一意的に存在し $\psi'|_A = \psi_1$。

ではいよいよ次節で Bedford-Smillie の主定理を述べましょう。

9 主定理とその証明の概略

前節までで Bedford-Smillie の主結果を述べるための準備が終りました。実際には、彼らは一連の論文 [BS5, BS6, BS7] の中で数多くの事実を示しているのですが、ここではそれらを以下のような形に主定理としてまとめました。

Theorem 9.1 (Bedford-Smillie [BS5, BS6, BS7]) f に対して以下の条件は同値。

(i) f はソレノイダル（すなわち $\Lambda_\mu(f) = \log d$）。

(ii) $\mathcal{C}^u = \emptyset$。

(iii) φ^+ は関数方程式$\varphi^+ \circ f(z) = (\varphi^+(z))^d$ を満たすように $J^- \setminus K^+$ 全体へ連続に拡張される。

(iv) $J^- \setminus K^+$ の *Riemann surface lamination* $\mathcal{M}_-$ が存在し、各 *leaf* $M \in \mathcal{M}_-$ に対して $\varphi^+|_M : M \to \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ は *holomorphic covering*。

更に f が双曲的であり、上の条件の中の一つを満たすと仮定すると、以下のそれぞれが従う。

(a) f と $\hat{p}_0$ の間の位相共役写像$\Psi : J^- \setminus K^+ \to \Sigma_+$ が存在し、Ψ は $J^- \setminus K^+$ の各 *leaf* $M \in \mathcal{M}_-$ 上で正則。

(b) 上の Ψ^{-1} の一意的な連続拡張$\Psi^{-1} : \Sigma \to J$ が存在し、$\hat{p}_0$ と f の *semi-conjugacy* を与える。すなわち、力学系として J は Σ の商空間として表される。特に J は連結。

Remark 9.2 J が連結である事と、f 或いは f^{-1} がソレノイダルである事は同値になる([BS6])。

以上を合わせると、各命題同士の間には図7の中に示したような関係が成立していることがわかります(図7)。

また、主定理の証明からわかる系として、

Corollary 9.3 以下の条件は同値。

(i) f はソレノイダル。

(ii) すべてのサドル周期点 p に対し、$W^u(p) \setminus K^+$ のすべての成分は単連結。

(iii) あるサドル周期点 p に対し、$W^u(p) \setminus K^+$ のある成分は単連結。

即ち、勝手な不安定多様体による K^+ のスライス(これはしばしばコンピュータ・シュミレーションによって描かれている)を見るだけで、f がソレノイダルであるかどうかを"視覚的に"判定できるわけです。

では以下では Theorem 9.1 の証明の一部のあらすじを見ていきましょう。まず、Theorem 9.1 (i) と Theorem 9.1 (ii) が同値なのは、critical measure の定義と積分公式 Theorem 7.5 を用います。続く流れとしては、Theorem 9.1 (ii) $\Rightarrow$ Corollary (ii) $\Rightarrow$ Corollary (iii) $\Rightarrow$ Theorem 9.1 (iii) $\Rightarrow$ Theorem 9.1 (iv) $\Rightarrow$ Theorem 9.1 (ii) の順で証明します。

Sketch of the Proof. まず $\mathcal{C}^u = \emptyset$ を仮定する。Proposition 7.3 (i) より、

$$\mathrm{Crit}(G^+|_{W^u(x)\setminus K^+}) = \emptyset \quad \text{for} \quad \mu\text{-a.e. } x \in \mathcal{R}. \tag{4}$$

よって critical measure の定義により $\mu_c^- = 0$。Theorem 7.5 より f がソレノイダルになることは明らか。逆に f がソレノイダルなら再び積分公式より (4) が従う(これから更に $\mathcal{C}^u = \emptyset$ を結論する部分は [BS6] Theorem 7.3 参照のこと)。

仮定 $\mathcal{C}^u = \emptyset$ のもと、Proposition 7.3 (iii) より特に全てのサドル周期点 $p \in \mathcal{R}$ に対して $\mathrm{Crit}(G^+|_{W^u(p)\setminus K^+}) = \emptyset$ となる。

Claim 1. $W^u(p)$ の位相で $W^u(p) \cap K^+$ は非有界(ここでは上の仮定は用いない)。

Proof. $g = (g_1, g_2) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ を $W^u(p)$ の uniformization とする。すなわち $f \circ g(z) = g(\lambda z)$ かつ $g(0) = p$。もし $W^u(p) \cap K^+$ がコンパクトとすると、$G^+ \circ g$ は $\mathbb{C}$ のある有界集合の外側で正かつ調和。よってグリーン関数の定義から、ある $c > 0$ が存在して、

$$G^+ \circ g(z) = c \log |z| + h(z).$$

ここで h は ∞ で調和。V^+ 上 $G^+(x,y) \le \log|x| + C$ が成り立つから $\log|g_1(z)| \to +\infty$ $(z \to \infty)$。すなわち g_1 は多項式。一方、すべての n に対して$\pi_1 \circ f^n \circ g(z) = g_1(\lambda^n z)$ だから（但し π_1 は第一座標への射影）、f と g_1 の次数をそれぞれ d と k とすると、両辺のリーディング・タームは cz^{kd^n} と $\lambda^{nk}z^k$ となり矛盾。よって Claim 1 が証明された。

Claim 2. $\mathcal{O}$ を $W^u(p) \setminus K^+$ の連結成分としたとき、$\mathcal{O}$ は単連結。

Proof. まず、Claim 1 より $\mathcal{O}$ の普遍被覆面は開単位円 Δ になる。いま $\mathcal{O}$ が単連結でないとすると、単純閉曲線 $\sigma \subset \mathcal{O}$ があって $\mathrm{int}\,\sigma \not\subset \mathcal{O}$ となる。$m \equiv \min_{z\in\sigma} G^+(z)$ とおき、

$$\mathcal{O}(s) \equiv \left\{ z \in \mathcal{O} \,\middle|\, G^+(z) \le s \right\}$$

を考える（以後、任意の集合 E に対して同様の表記 $E(s)$ を用いる）。$0 < s_0 < m$ を固定すると、$\mathcal{O}(s_0) \cap \mathrm{int}\,\sigma \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{O}(s_0) \cap \mathrm{ext}\,\sigma \neq \emptyset$。

さて、$\sigma \subset \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ であって、$\partial\mathcal{O}'$ が滑らかかつ $G^+|_{\partial\mathcal{O}'}$ の critical point は非退化であるようなものが取れる。更に $\partial\mathcal{O}'$ の連結成分 A (resp. B) で $\mathrm{int}\,\sigma$ (resp. $\mathrm{ext}\,\sigma$) に含まれ $A \cap \mathcal{O}(s_0) \neq \emptyset$ (resp. $B \cap \mathcal{O}(s_0) \neq \emptyset$) となるものが存在する。特に $A \cap B = \emptyset$ である。ここで、$\mathcal{O}'(s)$ の連結成分でその閉包が A (resp. B) と共通部分を持つものを $\mathcal{O}'_A(s)$ (resp. $\mathcal{O}'_B(s)$) とする（図 8）。明らかに、$s_0 < s < m$ ならば、

$$\mathcal{O}'_A(s) \cap \mathcal{O}'_B(s) = \emptyset. \tag{5}$$

次に m を越えて s を増やしたときも、上式が成立し続けることを証明しよう。s が増えるとき、(仮定により $\mathcal{O}'$ で critical point を持たないから) $\mathcal{O}'(s)$ の topology が変化するのは s が $G^+|_{\partial\mathcal{O}'}$ の critical value になるときのみ。このとき、$\mathcal{O}'(s)$ の、i) 新しい連結成分が発生する、または ii) 連結成分が消滅する、または iii) 二つの成分が合体する、または iv) 二つの成分が分離する、の何れかが起きる。しかし $A \cap B = \emptyset$ であるから、もし二つの成分が合体したとしたら、その二つは両方とも $\mathcal{O}'_A(s)$ (或いは $\mathcal{O}'_B(s)$) の連結成分でなければならない。他のケース i)、ii)、iv) は (5) に影響を与えない。よって全ての $s > s_0$ に対して (5) の成立が示された。

$\mathcal{O}'_A(s)$ の点と $\mathcal{O}'_B(s)$ の点を path でつなぎ、その上での G^+ の最大値を M とする。$s > M$ ととると、この path は $\mathcal{O}'_A(s)$ にも $\mathcal{O}'_B(s)$ にも入る。これは上の事実に矛盾する。よって Claim 2（すなわち Corollary 9.3 (ii)）が証明された。

ここで条件を弱めて Corollary 9.3 (iii) の方を仮定する。特に被覆写像 $\iota : \Delta \to \mathcal{O}$ は単葉になり、$h \equiv G^+ \circ \iota$ は正値調和関数で critical point を持たない。続いてこの h の性質について調べよう。

Claim 3. $c > 0$ と $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ が存在して、$h(z) = cP_{\theta_0}(z)$。ここで、

$$P_\theta(z) \equiv \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)$$

は $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ に極を持つポアソン核（*Poisson kernel*)。

Proof. Nevanlinna の定理（R, Nevanlinna, *Analytic Functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer 1970, page 204, 209）よりルベーグ測度に関して殆ど全ての$\theta \in [0, 2\pi]$ に対し、$q \equiv \lim_{r \nearrow 1} \iota(re^{i\theta})$ が存在する。$q \in \partial\mathcal{O} \subset K^+$ だから、殆ど全ての $\theta \in [0, 2\pi]$ に対し、$\lim_{r\nearrow 1} h(re^{i\theta}) = 0$。

h は Δ 上で正値調和だから、$\partial\Delta$ 上の正値測度 ν が存在して

$$h(z) = \int P_\theta(z)d\nu(z)$$

となる（Herglotz 表現）。この測度を分解して、$d\nu = \frac{1}{2\pi}gd\theta + d\lambda$ とできる。ここで、$g \in L^1[0, 2\pi)$、$g \geq 0$、λ は $\partial\Delta$ 上のルベーグ測度に対して特異。この時、$\lim_{r\nearrow 1} h(re^{i\theta}) = g(\theta)$ が殆ど全ての $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して成立する（M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Theorem IV.14. 参照）ので、上述の事実と合わせるとν が $\partial\Delta$ 上のルベーグ測度に対して特異であることがわかる。

次に $\mathrm{supp}\,\nu$ が一点のみから成ることを示す。いま、$\mathrm{supp}\,\nu$ が異なる二点 P、Q を含むとする。再び Claim 3 より、($\partial\Delta$ 上の順序を一つ固定して) $P < R < Q < S$ かつ $\lim_{r\nearrow 1, re^{i\theta}\to R, S} h(re^{i\theta})$ となるような $\partial\Delta$ 上の二点 R、S が取れる。R と S を結ぶ線分をとり、その上での h の最大値を M とする。一方、P、Q は $\mathrm{supp}\,\nu$ に入っているから、P'、Q' をそれぞれ P と Q に十分近く取れば $h(P') > 2M$ かつ $h(Q') > 2M$。P' と Q' を結ぶ線分をとり、その上での h の最小値を m とする。すると、R と S を結ぶ線分上の二点 R'、S' をそれぞれ R と S に十分近く取れば $h(R') < m$ かつ $h(S') < m$ とできる。あとは Claim 2 と同様の議論をすることにより、Δ 内に critical point の存在することが示され矛盾。これで Claim 3 が証明できた。

これより先、集合 E に対し、

$$E[s] \equiv \left\{z \in E \;\middle|\; G^+(z) > \log s\right\}$$

と書くことにする。

Claim 4.

$$\varphi^+|_{\mathcal{O}[\rho]} : \mathcal{O}[\rho] \longrightarrow \{|z| > \rho\}$$

は ρ が十分大きいとき被覆写像になる。

Proof. 上半平面 $\mathbb{H}$ からΔ への同型であって ∞ を $e^{i\theta}$ に写す写像を u とし、$\alpha \equiv u \circ \iota$ とおく。Claim 3 より、$G^+(\alpha(z)) = cP_{\theta_0}(u(z))$ に注意。$\mathbb{H}$ 上のポアソン核で ∞ に極を

持つものは $x+iy \mapsto x$ なので、$G^+ \circ \alpha(x+iy) = cx$ となる。ここで $c=1$ ととれる。$|x|$ が十分大の時、$G^+ \circ \alpha(x+iy) = \log|\varphi^+ \circ \alpha(x+iy)|$ かつ $\log|e^{x+iy}| = x$ だから、

$$\left|\frac{\varphi^+ \circ \alpha(x+iy)}{e^{x+iy}}\right| = 1$$

が $\mathbb{H}$ 上成立する。よって上式の絶対値の中身は定数で、$\varphi^+ \circ \alpha(z) = ce^z$。ここで ρ が十分大きいなら $\mathcal{O}[\rho] \subset V^+$ なので、$\mathcal{O}[\rho]$ では φ^+ は定義されている。$\varphi^+ = c \cdot \exp \circ \alpha^{-1}$ だから結論を得る。

$R > 0$ を十分大きくとれば、$s \equiv \varphi^+$ とおくと (s, y) は V^+ の座標系になる。

Claim 5. 有界単連結領域 $G \subset \{|z| > R\}$ と一点 $s_0 \in G$ を固定する。この時、連続写像：

$$H : G \times (\varphi^+)^{-1}(s_0) \longrightarrow J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G$$

が存在し、$\varphi^+ \circ H(s, t) = s$ を満たし、各 t ごとに $H(\cdot, t)$ は解析的。

Proof. 先のサドル周期点 $p \in \mathcal{R}$ に対して holomorphic disk $D^u \subset W^u(p)$、$p \in D^u$ をとる。Theorem 4.4 より、$c > 0$ が存在して

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^n}[f^n D^u \cap (\varphi^+)^{-1}G] = c \cdot \mu^- \llcorner (\varphi^+)^{-1}G$$

を得る。更に Proposition 4.1 から $\operatorname{supp}(\mu^- \llcorner (\varphi^+)^{-1}G) = J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G$ が従うから、$W^u(p) \cap (\varphi^+)^{-1}G$ は $J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G$ の稠密な部分集合になる。

M を $W^u(p) \cap (\varphi^+)^{-1}G$ の連結成分とすると、Claim 4 より $\varphi^+|_M : M \to G$ は被覆写像。よって各 $t \in W^u(p) \cap (\varphi^+)^{-1}(s_0)$ ごとに解析的写像 $g_t : G \to \mathbb{C}$ があって、M は g_t のグラフとして表せる（図 9）。V^- では

$$0 < k < \frac{|\varphi^+(x, y)|}{|y|} < K < +\infty$$

であって $J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G \subset V^-$ だから、族 $\{g_t\}_t$ は局所一様有界。よってこれは正規族をなすから、それらの極限関数達もまた解析的であり、前述の稠密性よりそれらのグラフによって $J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G$ は埋め尽くされる。$H(s, t) \equiv g_t(s)$ とおくと結論が得られる。

ではいよいよ Theorem 9.1 (iii) を証明しよう。

Claim 6. φ_+ は関数方程式：

$$\varphi_+ \circ f(z) = (\varphi_+(z))^d \tag{6}$$

を満たすように $J_- \setminus K_+$ 全体へ連続に拡張される。

Proof. $\rho > 0$ が十分大きければ、$J^-[\rho] \subset V^-$ なので $J^-[\rho]$ 上で φ^+ は定義される。よって、この φ^+ を $J^-[\rho^{1/d}]$ まで拡張できれば $J^- \setminus K^+$ 全体へ拡張される。$\pi : \mathbb{C}\setminus\overline{\Delta} \to \mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}$ を$\pi(z) = z^d$ で定義して $\psi \equiv \varphi^+ \circ f$ と書くと、「$J^-[\rho^{1/d}]$ 上で (6) を満たすφ^+ を見つける」事と「$\pi \circ \psi' = \psi$ を満たす$\psi' : J^-[\rho^{1/d}] \to \mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}$ を見つける」事は同値。よって先の Lemma 8.2 から、$J^-[\rho]$ が $J^-[\rho^{1/d}]$ の強レトラクト変形になっていることを示せばよい。

$f^n(J^-[\rho]) = J^-[\rho^{d^n}]$ で、f^n は微分同相写像だから $J^-[\rho]$ の位相は変えない。よって初めから $\rho^{1/d}$ は十分大としてよい。そこで、単連結領域：

$$S \equiv \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \geq \rho^{1/d} \text{ and } \; \theta_0 \leq \arg(z) \leq \theta_1 \right\}$$

を考えると、Claim 6 より $J^- \cap (\varphi^+)^{-1}(S)$ は $S \times (\varphi^+)^{-1}(s_0)$ と同相。そこで S 上での "半径方向への" 自然な強レトラクト変形を $J^- \cap (\varphi^+)^{-1}(S)$ にリフトすると、求めたい強レトラクト変形が得られる（図１０）。

続いて Theorem 9.1 (iv) を示す。

Claim 7. $J_- \setminus K_+$ は Riemann surface lamination の構造 $\mathcal{M}^-$ を持ち、各 leaf M について$\varphi^+|_M : M \to \mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}$ は被覆写像。

Proof. $p \in J^- \setminus K^+$ が $|\varphi^+(p)| > 2R$ を満たすときは、Claim 6 より H によってp の近傍における局所座標系が与えられる。一般の $p \in J^- \setminus K^+$ に対しては $n > 0$ があって $|\varphi^+ \circ f^n(p)| > 2R$ となる。$\xi \equiv \varphi^+ \circ f^n(p)$ として$\zeta_1, \cdots, \zeta_{d^n}$ を $z^{d^n} = \xi$ の根とする（但し、$\zeta_1 = \varphi^+(p)$）。ξ を含む十分小さい近傍 V をとり、$\{z | z^{d^n} \in V\}$ の連結成分を $G_1, \cdots, G_{d^n}$ （但し、$\zeta_i \in G_i$) とする。すると、

$$f^{-n}(J^- \cap (\varphi^+)^{-1}V) = \bigsqcup_{i=1}^{d^n} J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G_i$$

と分解される。

$$P_i \equiv \left\{ z \in (\varphi^+)^{-1}(\xi) \;\middle|\; \varphi^+ \circ f^{-n} = \zeta_i \right\}$$

とおくと、

$$f^n(J^- \cap (\varphi^+)^{-1}G_i) = H(P_k \times V)$$

となる。すなわち f^{-n} が局所座標系を定める。これで Claim 7 が示された。

Proposition 7.3 (ii) より、任意の $x \in \tilde{\mathcal{R}}$ に対して $W^u(x)$ は $\mathbb{C}$ と等角同値。よって $W^u(x) \setminus K^+$ は lamination $\mathcal{M}^-$ の leaf になる。更に Claim 7 より $\mathrm{Crit}(G^+|_{W^u(x)\setminus K^+}) = \emptyset$ 、すなわち $\mathcal{C}^u = \emptyset$ となり Theorem 9.1 (ii) が示された。 Q.E.D.

参考文献

[BLS] Bedford, E., Lyubich, M., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *IV: The measure of maximal entropy and laminar currents.* Invent. Math. **112**, pp. 77-125 (1993).

[BS1] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$*: Currents, equilibrium measure and hyperbolicity.* Invent. Math. **103**, pp. 69-99 (1991).

[BS2] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *II: Stable manifolds and recurrence.* J. Amer. Math. Soc. **4**, pp. 657-679 (1991).

[BS3] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *III: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure.* Math. Ann. **294**, pp. 395-420 (1992).

[BS0] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *V: Critical points, Lyapunov exponents and solenoidal mappings.* Preliminary version, Berkeley, May 1995.

[BS5] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *V: Critical points and Lyapunov exponents.* Preprint, 1997.

[BS6] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *VI: Connectivity of J.* Preprint, 1997.

[BS7] Bedford, E., Smillie, J. *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$ *VII: Hyperbolicity and external rays.* Preprint.

[Ca] Candel, A. *Uniformization of surface laminations.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **26**, pp. 489-516 (1993).

[FM] Friedland, S., Milnor, J. *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms.* Ergodic Theory Dynamical Systems **9**, pp. 67-99 (1989).

[He] Hénon, M. *A two-dimensional mappings with a strange attractor.* Commun. Math. Phys. **50**, pp. 69-77 (1976).

[HO] Hubbard, J., Oberste-Vorth, R. *Hénon mappings in the complex domain I: The global topology of dynamical space.* Publ. Math. IHES **79**, pp. 5-46 (1995).

[Kl] Klimek, M. *Pluripotential theory.* London Math. Soc. Monographs. New Series, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, 1991.

[Ma] Manning, A. *The dimension of the maximal measure for a polynomial map.* Ann. Math. **119**, pp. 425-430 (1984).

[Mi] Milnor, J. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures.* Preprint SUNY at Stony Brook #1990/5 (1990).

[Ni] Nishimura, Y. Lecture note. *Topics in Complex Analysis* (ed. M. Taniguchi), pp. 23-69 (1993).

[Po] Pollicott, M. *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds.* London Math. Soc. Lecture Note Series, 180. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Pr] Przytycki, F. *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map.* Invent. Math. **80**, pp. 161-179 (1985).

[Sm] Smillie, J. *The entropy of polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$. Ergodic Theory Dynamical Systems **10**, pp. 823-827 (1990).

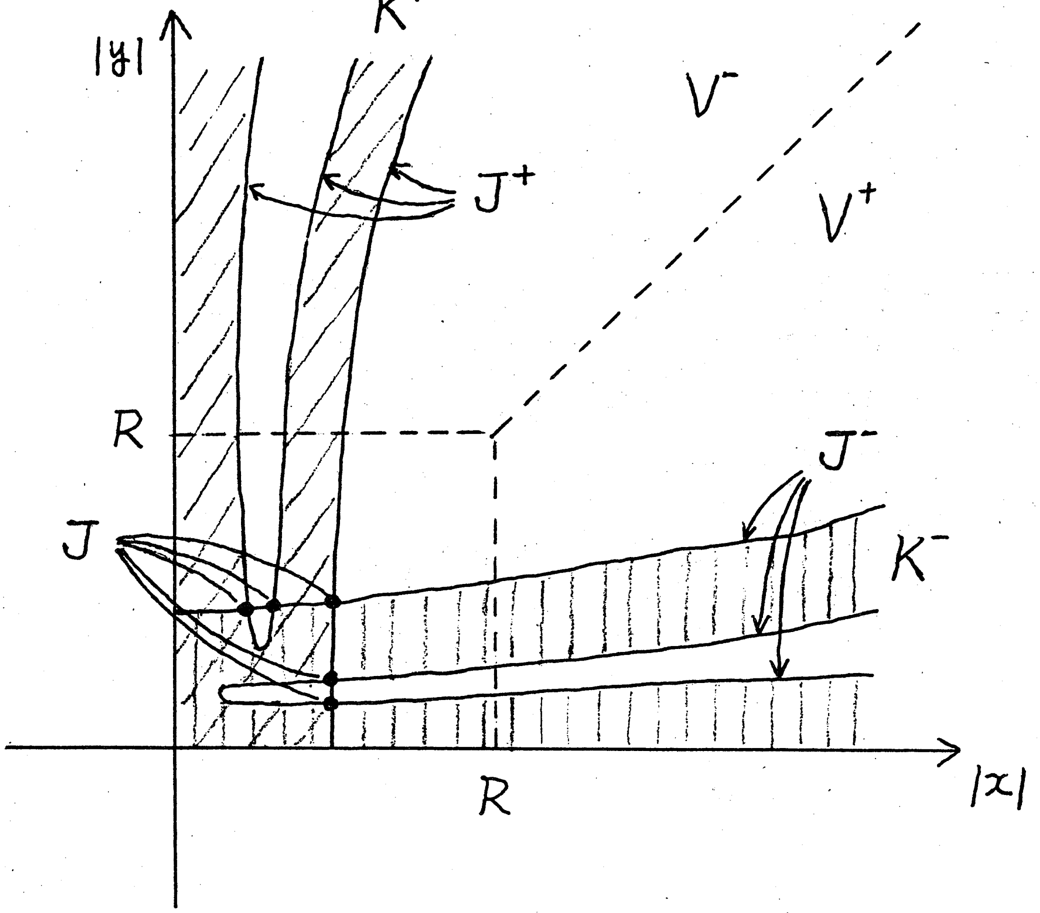


図 1

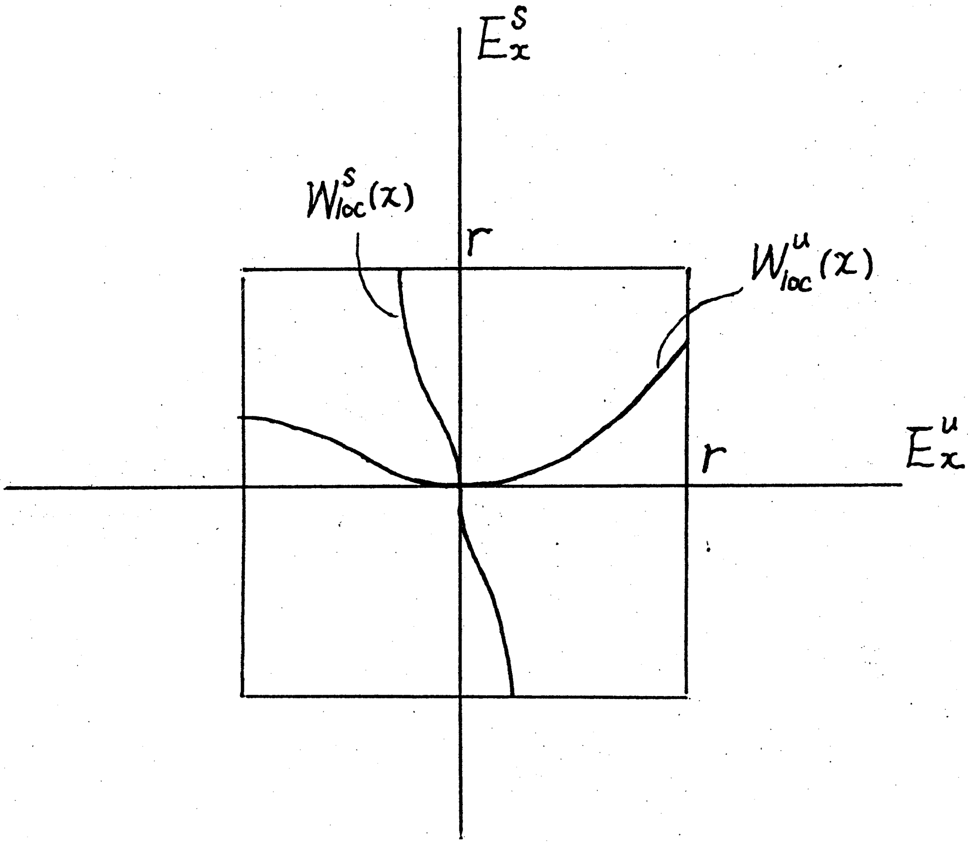
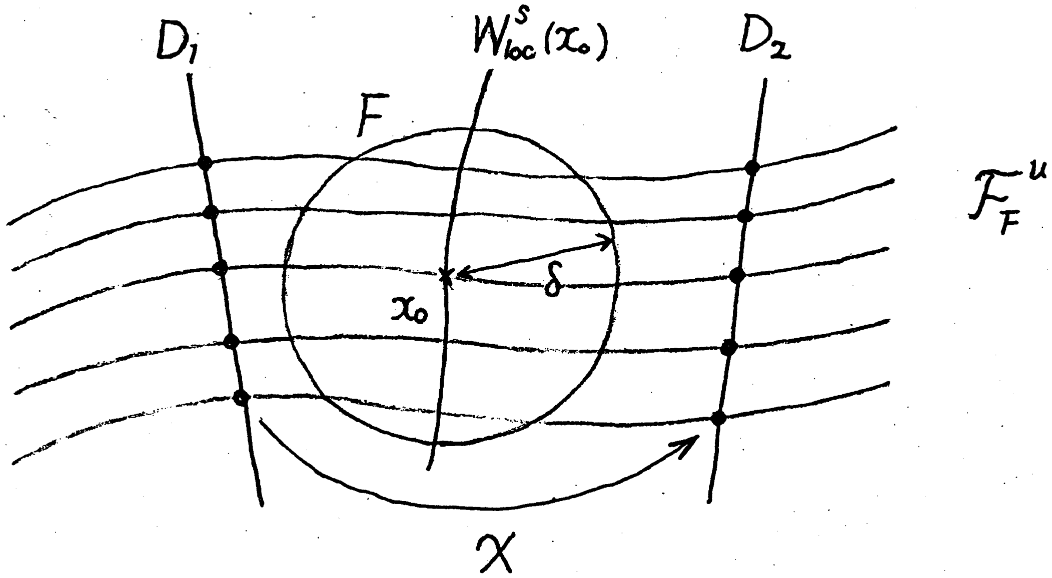
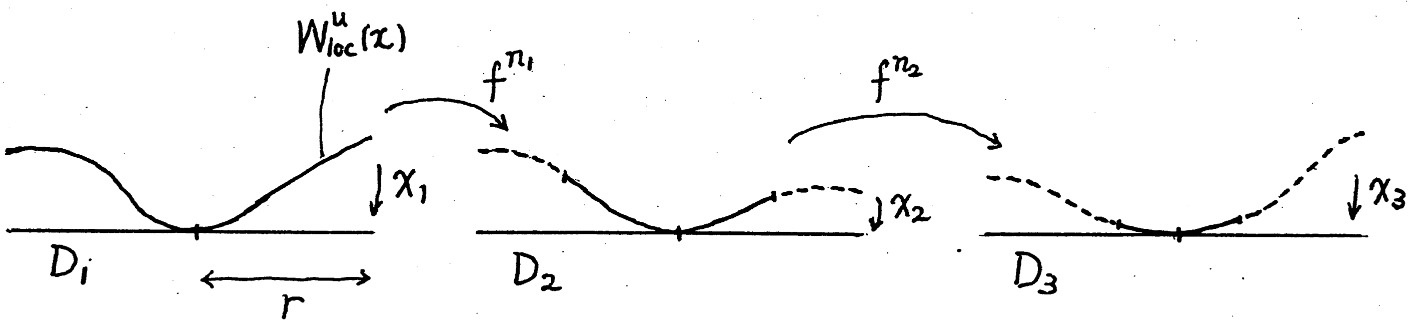


図 2



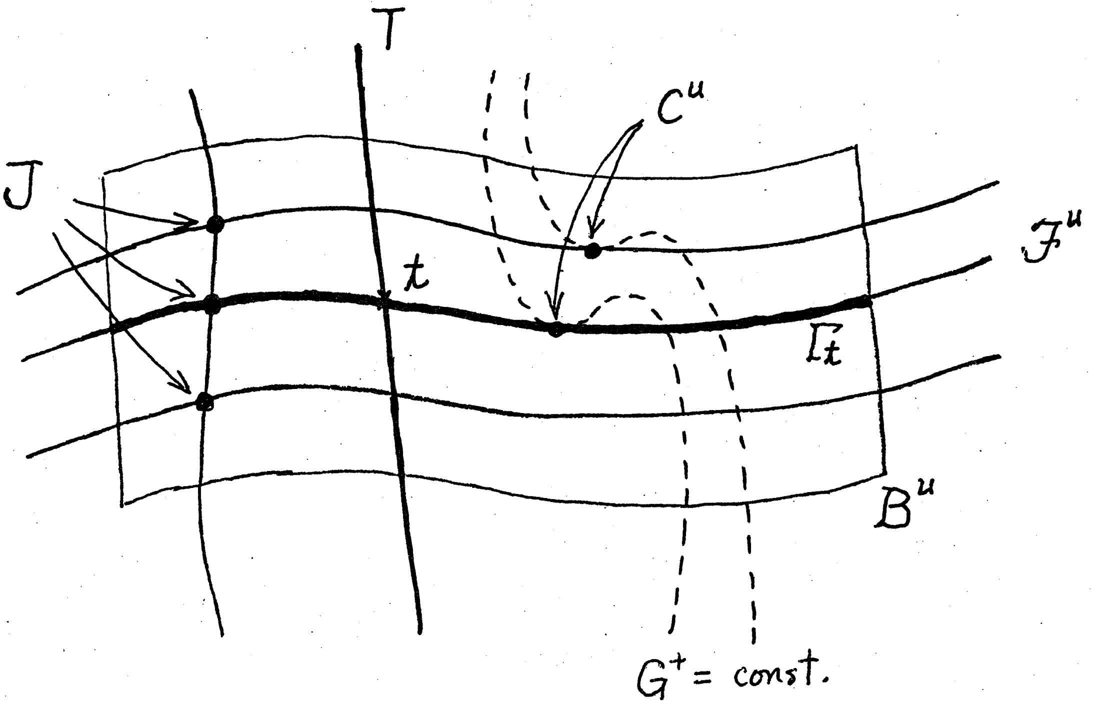
D_1
$W^s_{loc}(x_0)$
D_2
F
$\mathcal{F}^u_F$
x_0
δ
χ

図 3



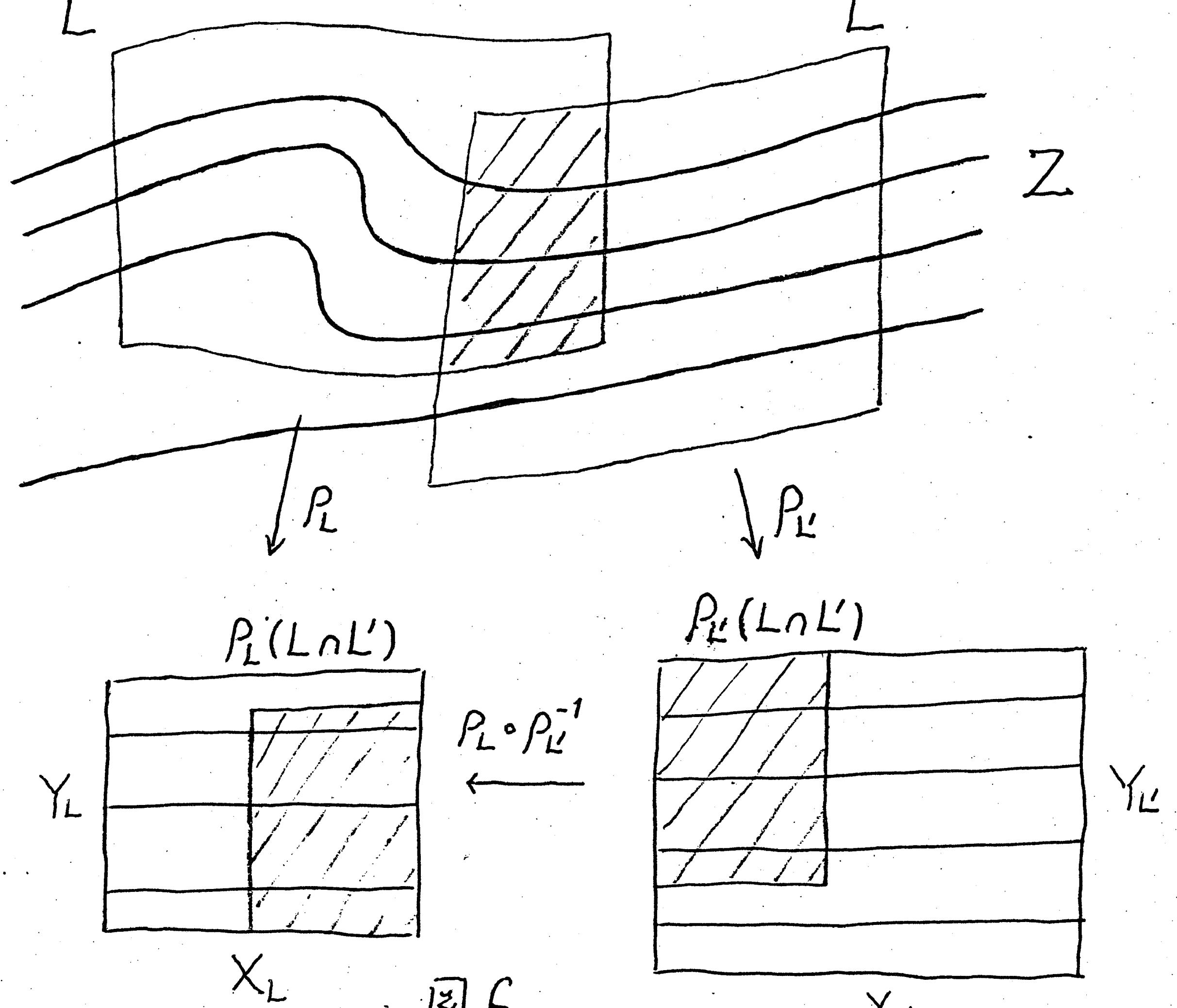
$W^u_{loc}(x)$
f^{n_1}
f^{n_2}
x_1
x_2
x_3
D_1
D_2
D_3
r

図 4



T
J
C^u
t
$\mathcal{F}^u$
I_t
B^u
$G^+ = \text{const.}$

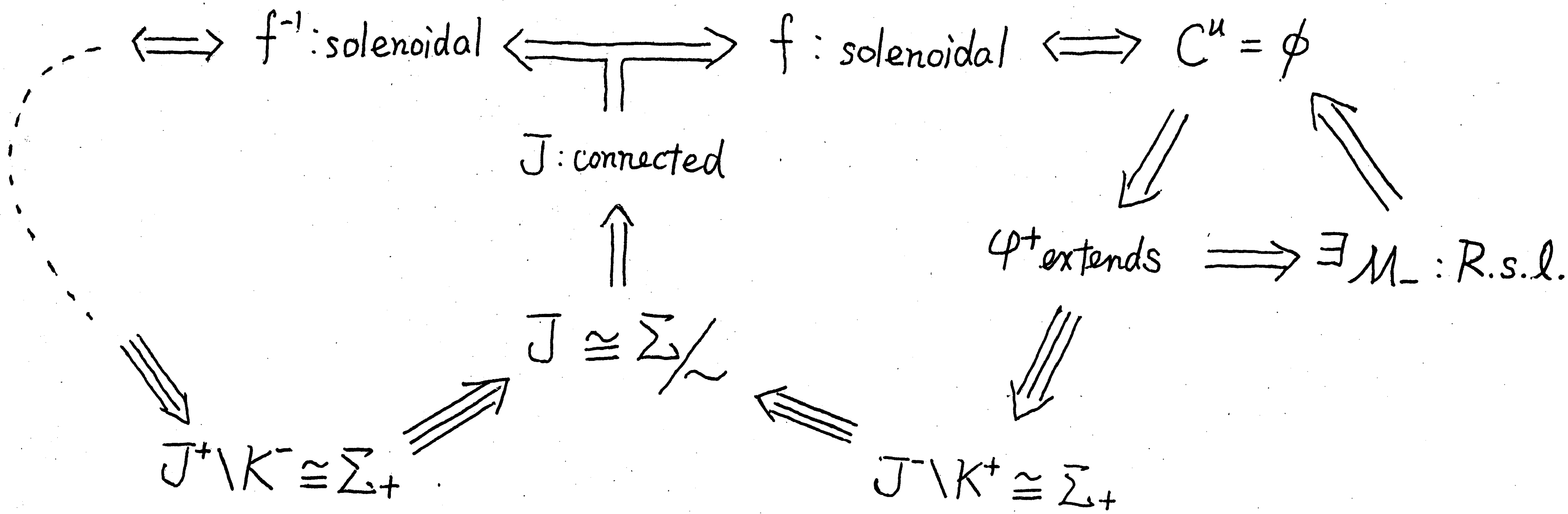
図 5



L
L′
Z
P_L
$P_{L'}$
$P_L(L \cap L')$
$P_{L'}(L \cap L')$
$P_L \circ P_{L'}^{-1}$
Y_L
$Y_{L'}$
X_L
$X_{L'}$

図 6

図7



（$\Longleftarrow$ は双曲性を仮定すると成立する．）

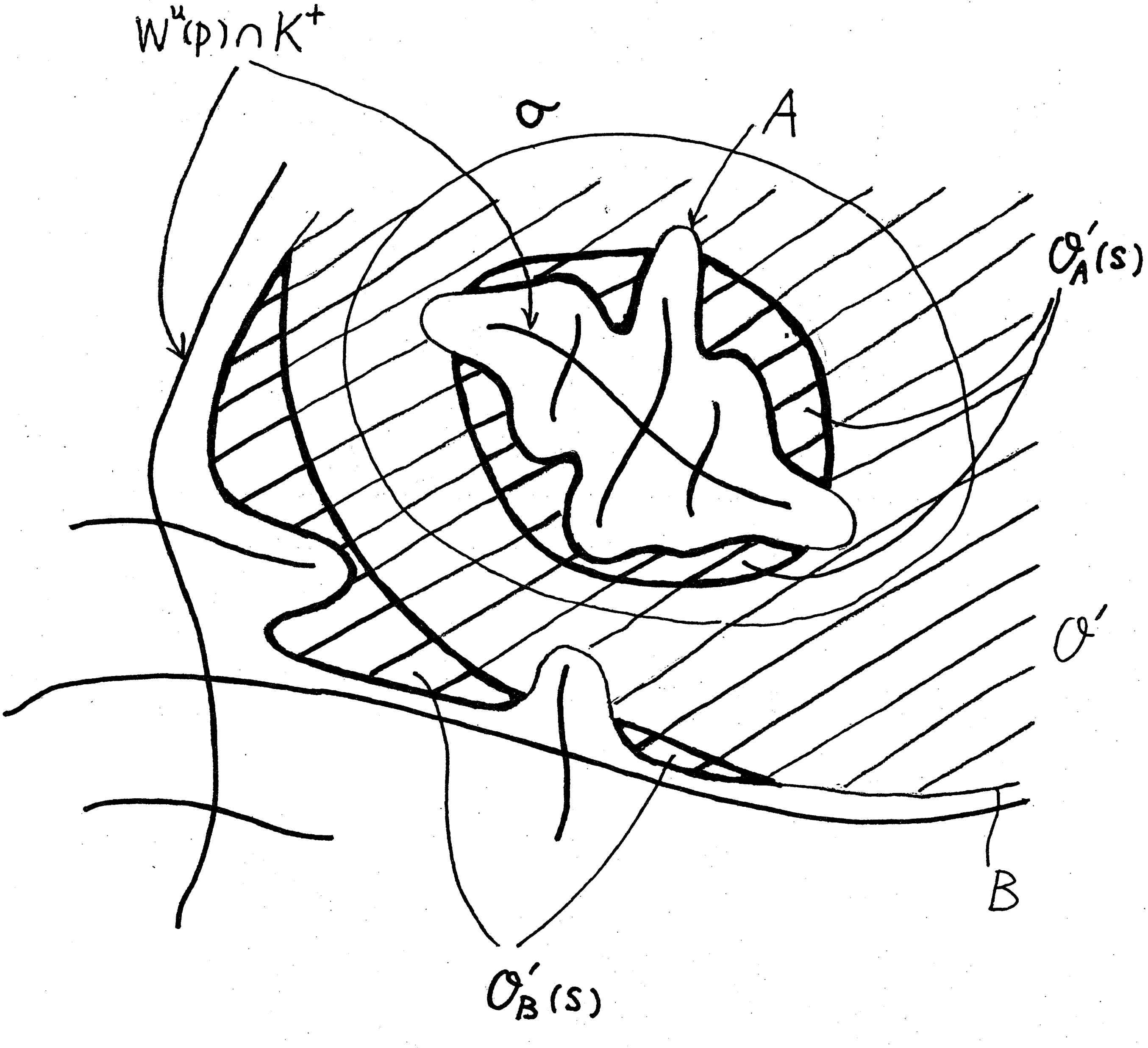


図 8

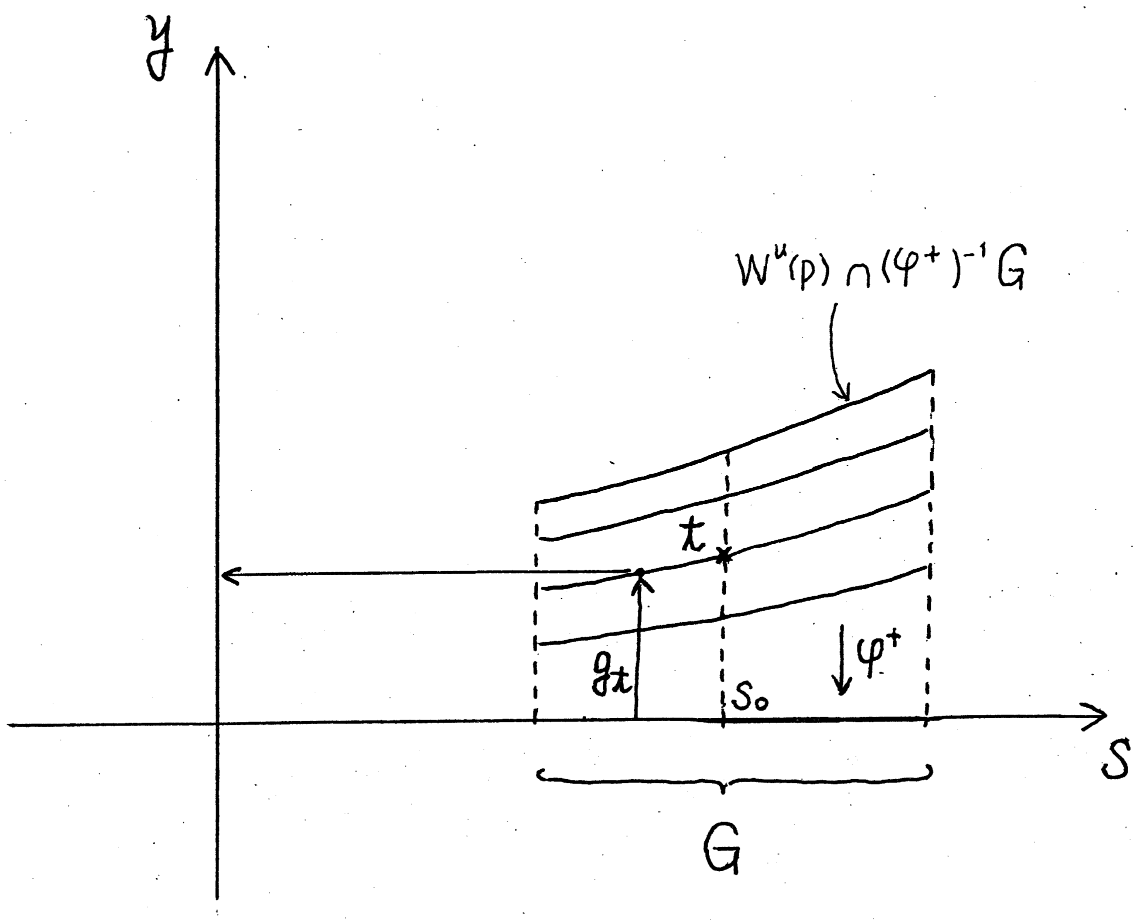

y
$W^u(p) \cap (\varphi^+)^{-1}G$
t
g_t
s_0
φ^+
S
G

図9

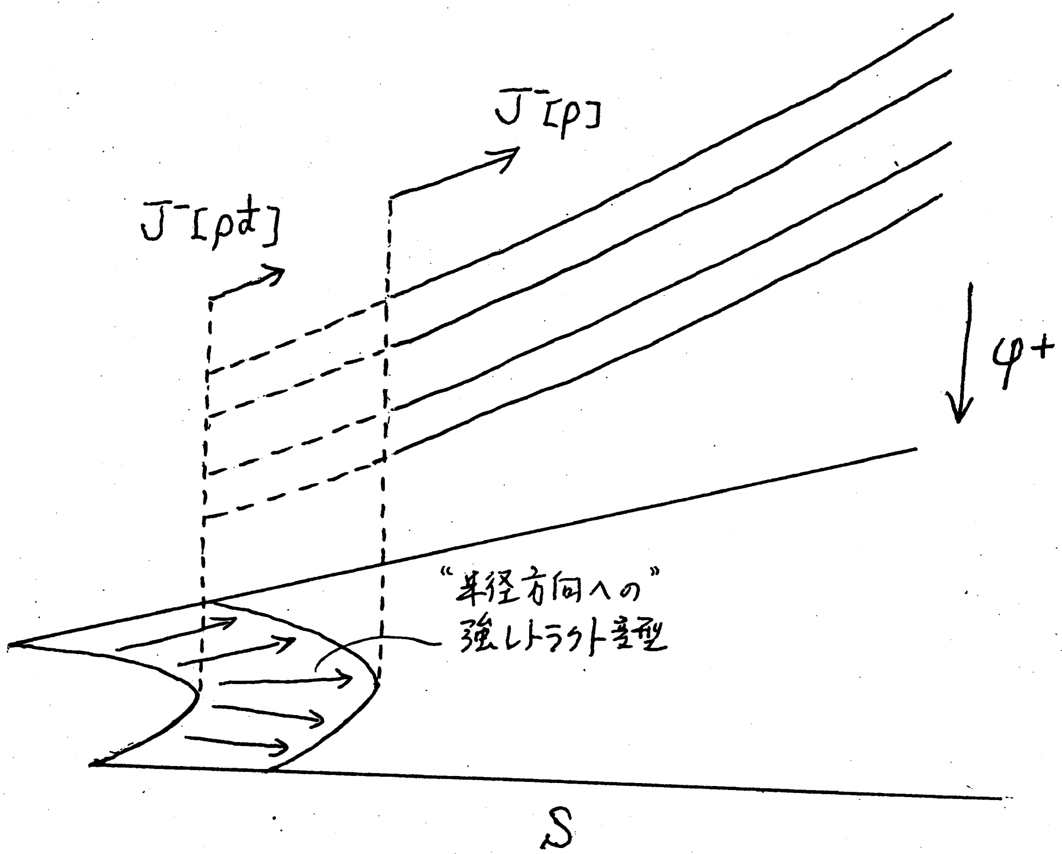

$J^-[p]$
$J^-[p_t]$
φ^+
"半径方向への"
強いトラクト変型
S

図10